

# Allocation d'actifs à long terme

30 octobre 2018



# Introduction

Quelle est l'importance du long terme en allocation d'actif ? Nombreux investisseurs se sont vus conseiller un investissement en actions si leur horizon investissement est long. En même temps, la majorité des épargnants, notamment français, évite les actions et préfère investir l'intégralité de leur patrimoine dans l'immobilier. Sur le temps long, il semble que les données ont donné raison aux épargnants français. Nous représentons sur la figure 1 la valeur cumulée d'un euro (ou plutôt un Franc) investi en 1960 ; nous comparons la performance d'un investissement en instrument monétaire, en action, en obligations, et en immobilier. En ignorant pour l'instant l'immobilier, on reconnaît la hiérarchie usuelle des rendements entre actions, obligations, et monétaire. La performance sur le long terme d'un investissement immobilier est une surprise, d'autant que les rendements immobiliers semblent nettement moins volatils que les rendements actions. Cependant, le calcul de tout rendement de long terme est un exercice incertain, en particulier s'agissant des rendements immobiliers. Dans les travaux de recherche que nous résumons ici, nous avons essayé de quantifier le choix optimal d'un investisseur de long terme, compte tenu à la fois des données historiques disponibles, mais aussi de l'incertitude qui les entourent.

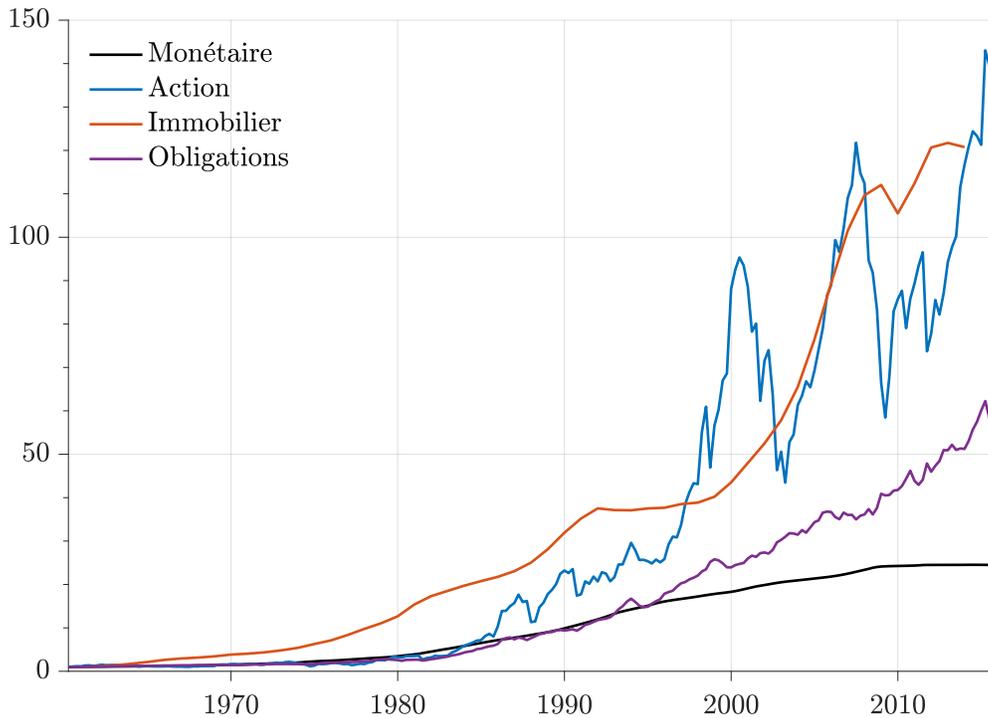


FIGURE 1 – Valeur cumulée d'un euro investi en 1960 (France).

Concentrons-nous pour l'instant sur les différences de rendements moyens de ces différentes classes actifs à long terme. Une conséquence immédiate pour un investisseur de long terme est que le rendement moyen écrase la variance quand l'horizon d'investissement s'accroît. Pour illustrer ce point nous calculons la probabilité de sous-performer un investissement en monétaire pour les actions, obligations dix ans (avec réinvestissement), et pour un investissement immobilier. Nous calculons cette probabilité en fonction de l'horizon d'investissement pour la France ainsi que pour neuf autres pays. (Nous présentons en détails nos données dans l'Annexe A). Pour gagner en précision nous présentons sur la Figure 2 le résultat moyen pour ces 10 pays. On voit que la probabilité pour les actions de réaliser un rendement inférieur au monétaire décroît sensiblement lorsque l'horizon d'investissement s'accroît. Pour un horizon d'investissement de un trimestre, elle est approximativement de 40%; pour un horizon de 20 ans, elle avoisine les 10%. On obtient des résultats similaire mais moins marqués pour les obligations et l'immobilier.

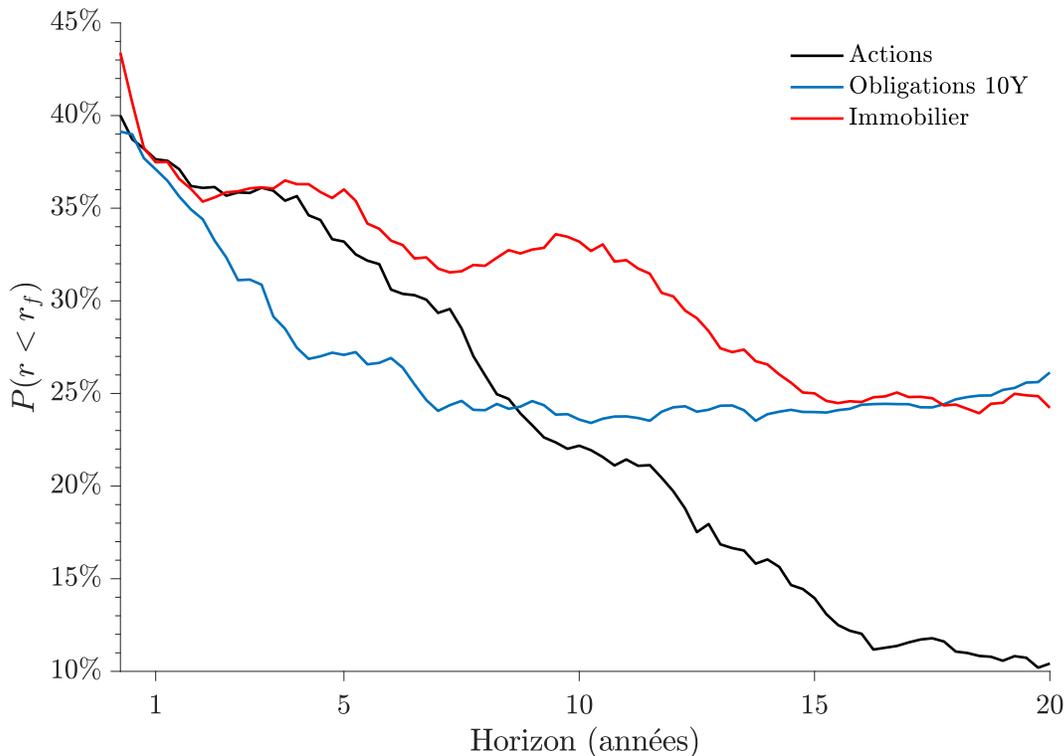


FIGURE 2 – Probabilité de sous-performer un instrument monétaire. Données internationales : Australie, Belgique, Canada, France, Allemagne, Italie, Japon, Espagne, UK, USA. **Le rendement moyen domine la variance lorsque l'horizon d'investissement s'accroît.**

Paradoxalement, le fait que la probabilité de sous-performer décroisse avec l'horizon n'a pas d'importance pour un investisseur moyenne-variance. C'est pourtant ce cadre d'investissement qui

est classiquement enseigné en théorie financière. Nous illustrons ce point sur la figure 3. Cette figure présente le diagramme volatilité-rendement pour des horizons allant d'un trimestre à 20 ans. Lorsque l'horizon d'investissement s'accroît, le rendement moyen et la volatilité croissent en proportion. Par conséquent, le compromis rendement-volatilité illustré par la frontière efficace est inchangé.

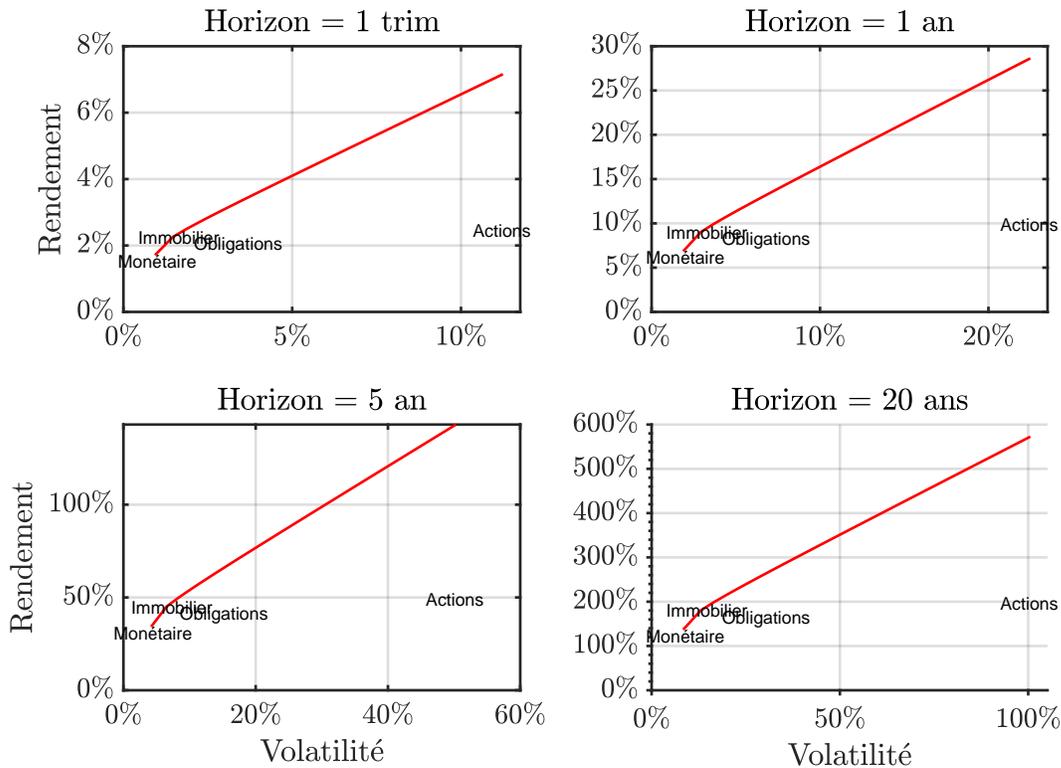


FIGURE 3 – Diagramme moyenne-variance lorsque l’horizon s’accroît (France). **A priori pas d’importance pour un investisseur Moyenne-Variance**

Ce résultat paradoxal repose sur une hypothèse qui n’est en fait pas empiriquement vérifiée. Cette hypothèse est que les rendements des différentes classes d’actifs sont imprévisibles. Elle est souvent associée à l’idée de marchés efficients. Cette association relève en fait d’un malentendu. D’ailleurs, le père des marchés efficients, Eugène Fama, fut parmi les premiers à montrer que les rendements de nombreuses classes d’actifs étaient en fait prévisibles.<sup>1</sup> A long terme, les rendements action par exemple ont tendance à être négativement auto-corrélés. En d’autres termes les rendements action sont caractérisées par le phénomène de retour à la moyenne, dans lequel une baisse des prix est généralement suivie par une hausse, et vice versa. La prévisibilité des rendements n’est en fait pas contradictoire avec la notion de marché efficient. Les rendements peuvent être partiellement

1. Cf. Fama (1984), Fama (1986), Fama and Bliss (1987), Fama and French (1988b).

prévisible si les primes de risque varient dans le temps. Par exemple, les prix des actions sont peut être historiquement bas quand l'économie entre en récession et que l'aversion au risque augmente. Empiriquement, on verra alors que des prix bas coïncident avec des rendements futurs élevés.<sup>2</sup>

Aujourd'hui, si la majorité des travaux de recherche s'accordent pour tenir compte de la composante prédictive des rendements, les méthodologies diffèrent. L'approche que nous avons retenue consiste à modéliser de façon jointe la dynamique des rendements des actifs et de leur prédicteurs dans le cadre d'un modèle Vector Autoregression (VAR), suivant notamment les travaux de Campbell and Viceira (2002). L'avantage de cette approche est qu'elle consiste à modéliser les relations entre les variables les fréquences relativement élevées (par exemple, par trimestre), pour ensuite calculer des mesures de risque à des fréquences basses (par exemple, par décennie).

Toute approche statistiques est sujette aux risque de sur-apprentissage ; ce risque est particulièrement aigu dans ce contexte où le nombre de prédicteurs est potentiellement très large. Par ailleurs, même en présence de données longues, les statistiques que nous estimons sont souvent très imprécises. Merton (1980) en particulier a remarqué que l'estimation d'un rendement moyen était plus difficile que l'estimation d'une volatilité. Notre méthode, par conséquent, a consisté à retenir un faible nombre de variables prédictives qui ont été proposées par la littérature. D'un point de vue statistique, nous avons adopté une approche hybride dans laquelle les rendements moyens sont pour la plupart calibrés, tandis que les volatilité et corrélations sont estimées. Cette approche limite le risque du sur-apprentissage tout en reconnaissant l'incertitude qui caractérise les séries longues.

Nous avons par la suite proposé de tenir compte de l'incertitude entourant ces relations de prédictibilité et le caractère imparfait du modèle linéaire pour capturer la composante prédictible. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur l'approche bayésienne en intégrant des anticipations (priors) et croisant l'information disponible entre pays. Ce dernier aspect a fait l'objet d'un développement approfondi dans Penasse (2015), qui propose une approche par panel entre pays afin d'obtenir des relations de prédictibilité plus robustes et précises. En particulier, des anticipations sont formées sur la base de l'hypothèse de rendements nationaux échangeables.

Une autre spécificité pratique du long terme est la présence d'une contrainte de passif pour de nombreux investisseurs, par exemple l'assureurs-vie. Cette contrainte est généralement ignorée par la littérature. Le problème d'allocation y est généralement abordé en considérant un problème de maximisation d'une fonction d'utilité dépendant du rendement et du risque d'un portefeuille, qui est dépourvu de passif. Ce cadre peut être étendu pour introduire un besoin de couverture du passif. Récemment, Hoevenaars et al. (2008) et Binsbergen and Brandt (2012) mettent en évidence l'impact de cette prise en compte sur l'allocation à long terme. En présence d'un passif, l'investisseur tiendra non seulement compte du rendement et du risque des actifs, mais aussi de leur corrélation avec le passif. Un actif très corrélé avec le passif est désirable puisqu'il couvre le risque du passif. Ainsi,

---

2. Marfè and Penasse (2017) s'intéressent à cette question et trouvent en fait que les prix sont bas lorsque le risque de récession augmente.

notre recherche a étendu le cadre de Campbell and Viceira (2002) à différentes formes de passif, en s'inspirant notamment de Hoevenaars et al. (2008). Le modèle économétrique proposé permet de tenir compte de cette corrélation en fonction de l'horizon d'investissement tout en intégrant des contraintes réglementaires de type Solvabilité II dans l'allocation d'actif.

## 1 Prédicibilité des actifs financiers

### 1.1 Retour à la moyenne et prédictibilité

Le phénomène de "retour à la moyenne" des prix des actions est aujourd'hui un phénomène consensuel parmi les économistes. Fama and French (1988b) et Poterba and Summers (1988) furent parmi les premiers à analyser les propriétés de long terme des rendements actions. Ces derniers ont proposé une approche non-paramétrique pour tester l'existence de ce phénomène en introduisant le ratio de variance. Le ratio de variance est défini par  $v_k = \frac{1}{k} \frac{\text{var}(r_{t,t+k})}{\text{var}(r_{t+1})}$ , avec  $r_{t,t+k} = \sum_{i=1}^k r_{t+i}$  la somme des rendements. Si ceux-ci sont i.i.d., la variance de long terme doit croître en fonction de l'horizon  $\text{var}(r_{t,t+k}) = k\text{var}(r_{t+1})$ , de sorte que si  $v_k < 1$ , les actions sont moins risquées à un horizon  $k$ . Nous reproduisons sur la figure 4, le ratio de variance pour les actions pour un horizon allant d'un trimestre à 20 ans. Nous présentons le ratio moyen pour les 10 pays de notre échantillon, mais les résultats pour la France uniquement sont très similaires. Si les rendements action n'étaient pas auto-corrélés, le ratio serait constant et égal à 1. On voit au contraire que le ratio augmente légèrement jusqu'à un an, puis diminue pour atteindre 0.5 à 20 ans. En d'autres termes, un investisseur à long terme ne subira pas une variance qui est proportionnelle à son horizon d'investissement. De ce point de vue, les actions sont moins risquées à long terme.

Les études mentionnées ci-dessus ne s'intéressent qu'à l'autocorrélation à long terme des rendements action. De nombreux autres travaux se sont attachés à identifier d'autres variables pouvant prévoir les rendements futurs. Parmi ces variables, les ratios de valorisation, en particulier le ratio dividendes/prix, sont généralement considérés comme capables de prédire les rendements futurs : si les prix sont "trop bas" par rapport aux dividendes, il est commun de s'attendre à un rattrapage des prix et donc à des rendements anormalement élevés. D'autres prédicteurs ont été par la suite, et ce pour de nombreuses classes d'actifs.

On présente à titre d'illustration, les résultats de régressions de la forme

$$r_{t+k} = a + bz_t + u_{t+k} \tag{1}$$

dans les Tableaux 1 et 2. Dans l'équation ci-dessus on régresse les rendements excédentaires cumulés sur  $k$  trimestres, pour la France et les Etats-Unis, sur une constante et un prédicteur  $z_t$ . On considère les horizons d'un, trois, cinq et dix ans. Les tableaux présentent le coefficient  $b$  et la statistique de

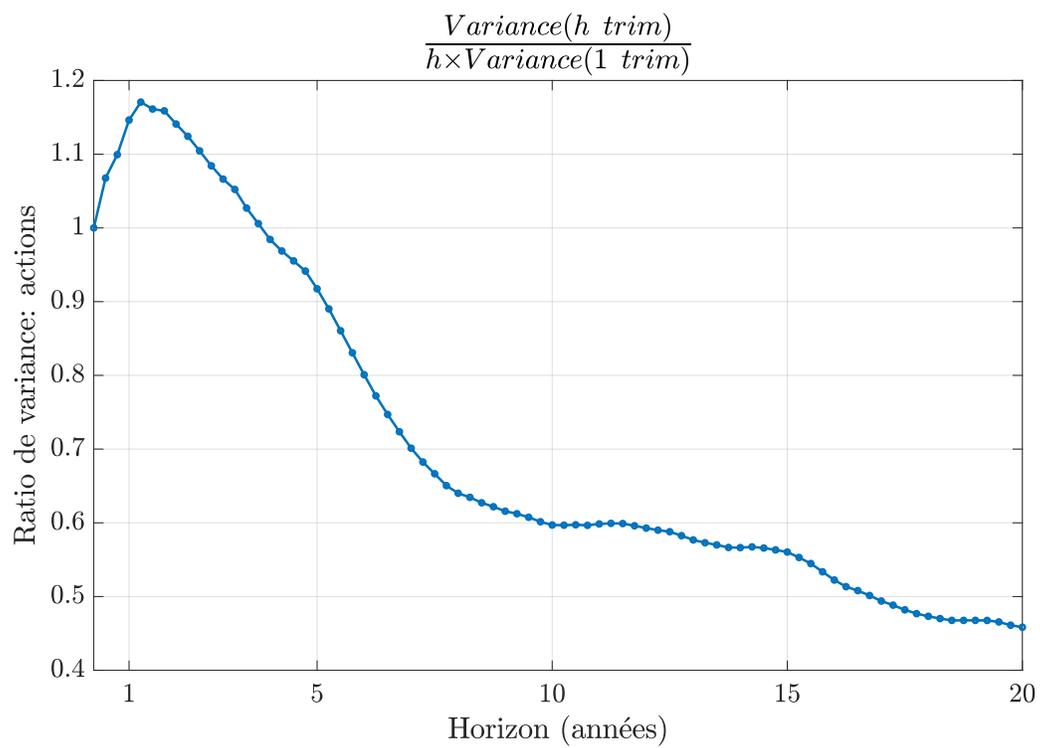


FIGURE 4 – Ratio de variance (Données internationales). **La volatilité varie en fonction de l’horizon d’investissement.**

Student (une valeur au-dessus de 2 indique que la prédictibilité est statistiquement significative). Nous présentons les résultats de prévisibilité des actions obligations et immobilier dans le tableau 1. Les variables prédictives que nous considérons sont respectivement le ratio dividende/prix (Fama and French, 1988a), la pente de la courbe des taux (Fama and Bliss, 1987), et le ratio loyers/prix (Case and Shiller, 1987). Le tableau 2 présente les résultats d'un exercice similaire pour le marché des changes, les obligations corporate, et les obligations Aaa. Les variables prédictives nous considérons sont le taux de change réel (Dahlquist and Penasse, 2017), et le spread Baa-Aaa (Fama, 1986).

Les deux tableaux résumant de façon non ambiguë l'état de la littérature. A l'exception des obligations françaises, les rendements de toutes les classes d'actifs sont prévisibles. La prédictibilité mesurée par le coefficient de détermination  $R^2$  augmente avec l'horizon. Cela signifie qu'à mesure que l'horizon s'accroît, une part plus importante de la variance des rendements peut être prédite. Économiquement, cela signifie qu'une part significative des prix des actifs subit des chocs qui sont transitoires. Ces chocs ont tendance à s'annuler avec le temps.

TABLE 1 – **Prévisibilité des rendements actions, obligations et immobiliers**

$K$	France				USA			
	1	3	5	10	1	3	5	10
Actions [ratio dividende/prix]								
1960 - 2015								
$b$	2.79	8.13	13.25	16.24	2.89	7.98	13.36	18.14
t-stat	2.45	4.84	8.70	9.86	3.26	6.39	9.89	9.92
$R^2$	0.04	0.13	0.26	0.32	0.05	0.13	0.25	0.30
1920 - 2015								
$b$	2.79	8.13	13.25	16.24	2.89	7.98	13.36	18.14
t-stat	2.45	4.84	8.70	9.86	3.26	6.39	9.89	9.92
$R^2$	0.04	0.13	0.26	0.32	0.05	0.13	0.25	0.30
Obligations [pente]								
1960 - 2015								
$b$	0.73	0.68	-0.30	-0.60	2.19	2.60	2.70	6.51
t-stat	1.28	0.82	-0.20	-0.30	5.33	3.77	2.93	4.52
$R^2$	0.02	0.00	0.00	0.00	0.13	0.07	0.04	0.10
1920 - 2015								
$b$	0.73	0.68	-0.30	-0.60	2.19	2.60	2.70	6.51
t-stat	1.28	0.82	-0.20	-0.30	5.33	3.77	2.93	4.52
$R^2$	0.02	0.00	0.00	0.00	0.13	0.07	0.04	0.10
Immobilier [ratio loyer/prix]								
1970 - 2015								
$b$	0.85	6.64	15.91	58.03	0.40	12.31	22.31	40.76
t-stat	0.82	3.18	4.58	4.57	0.18	2.88	4.99	5.21
$R^2$	0.01	0.04	0.10	0.31	0.00	0.08	0.15	0.28

Régressions prédictives des rendement annuels cumulés sur  $K$  périodes pour la France et les USA.

## 1.2 Conséquences pour l'allocation à long terme

Les conséquences pour l'allocation à long terme sont doubles. On a déjà vu que lorsque les rendements étaient prévisible, la volatilité n'était pas constante en fonction de l'horizon (Figure 4).

TABLE 2 – Prévisibilité des rendements des marchés de changes et crédit

$K$	1	3	5	10
	USD/EUR [taux de change réel], 1976 - 2015			
$b$	0.39	1.40	2.36	2.48
t-stat	2.61	6.74	12.06	19.39
$R^2$	0.09	0.34	0.63	0.82
	Obligations corporate [spread Baa-Aaa], 1926 - 2014			
$b$	4.27	13.00	17.39	25.47
t-stat	5.55	12.96	10.96	10.63
$R^2$	0.09	0.26	0.27	0.26
	Obligations Aaa [spread Baa-Aaa], 1920 - 2015			
$b$	2.81	9.28	12.67	19.16
t-stat	5.09	10.09	9.23	8.37
$R^2$	0.06	0.19	0.20	0.19

Régressions prédictives des rendements annuels cumulés sur  $K$  périodes pour la France et les USA.

Par conséquent, la logique qu'on a vue en introduction ne s'applique pas et l'allocation d'actif va dépendre de l'horizon d'investissement.

Ensuite la prédictibilité des rendements offre la possibilité aux investisseurs de long terme d'ajuster leur allocation d'actifs en fonction du cycle économique. Nous illustrons ce point sur la Figure 5, dans laquelle nous montrons les rendements moyens et la volatilité d'un placement en action à 5 ans en fonction du cycle. Pour mesurer le cycle, nous calculons les rendements futurs au delà du monétaire lorsque le ratio dividende/prix est plus ou moins élevé (mesuré par son quantile). Nous effectuons ce calcul pour les 10 pays de notre échantillon et présentons les résultats pour les rendements moyens à travers ces dix pays. On voit que lorsque un les prix sont historiquement hauts, les rendements excédentaires futurs avoisinent zéro en moyenne. Symétriquement, plus les prix sont faibles, plus les rendements moyens sont élevés. Ce résultat est en ligne avec les résultats du tableau 1. Nous voyons, en outre, qu'alors que les rendements moyens dépendent du ratio dividende/prix, ce n'est pas le cas de la volatilité. En d'autres termes, le compromis risque/rendement ne semble pas satisfait en fonction du cycle.

Conséquence du fait que les rendements futurs dépendent du cycle, la probabilité de sous performance des classes d'actifs est elle-même cyclique. C'est ce que nous montrons Figure 6, dans laquelle nous recalculons la probabilité de sous performer un investissement monétaire pour les actions obligations et immobilier. Nous définissons le cycle par le niveau du ratio dividende/prix, de la courbe des taux, et du ratio loyer/prix, respectivement. Nous considérons que le prédicteur est en haut de cycle lorsqu'il est au dessus ou égal à son premier décile, et réciproquement pour le bas de cycle. On voit très nettement pour les actions et l'immobilier que la probabilité de perte

dépend du cycle. Dans les deux cas, en bas de cycle, la probabilité de sous-performance est quasi nulle. Pour les obligations, l'effet du cycle est moins marqué et limité aux horizons courts.

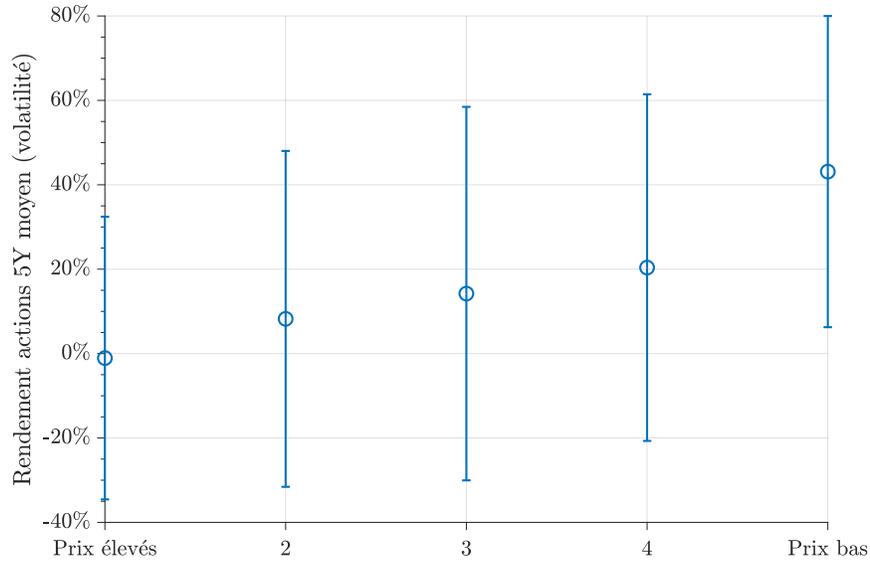


FIGURE 5 – Rendements excédentaires actions sur 5 ans : moyenne et volatilité en fonction du cycle. Données internationales. **Possibilité de market timing si l'horizon est suffisamment long.**

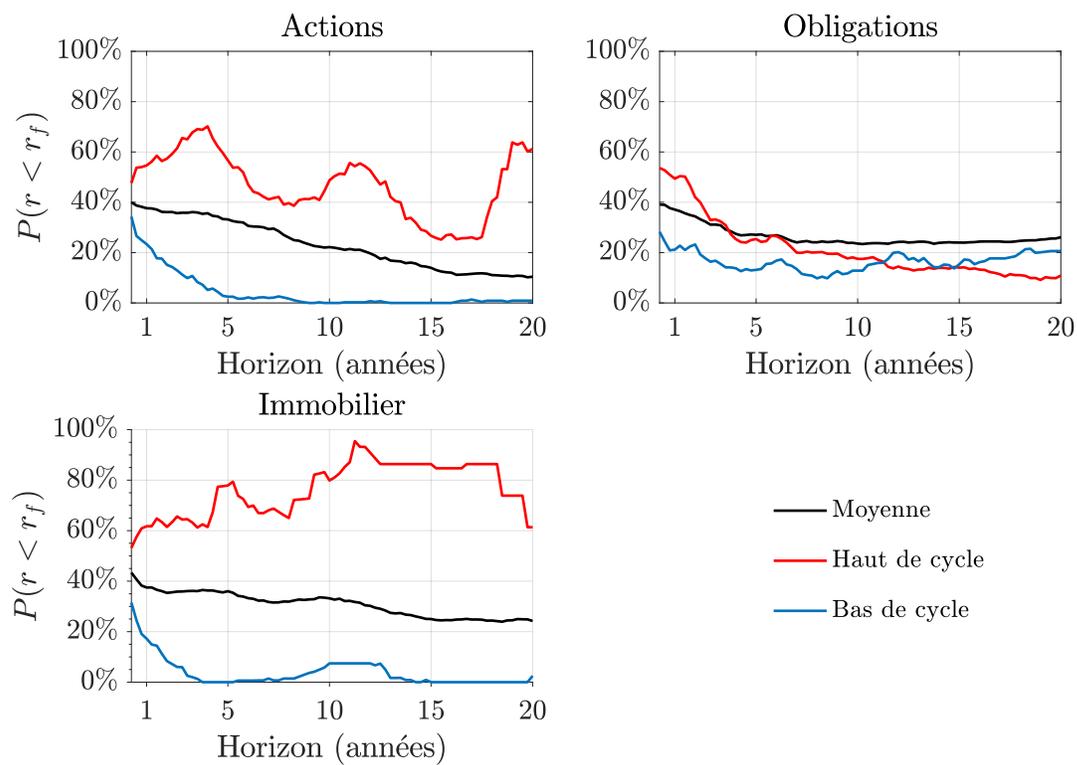


FIGURE 6 – Probabilité de sous-performer un instrument monétaire en fonction du cycle (Données internationales). **La probabilité de sous-performance dépend du cycle.**

## 2 Modélisation économétrique

### 2.1 Modèle VAR

Aussi importants soient-ils, les faits stylisés que nous avons présenté dans la section précédente ne nous permettent pas de construire une allocation d'actifs. À mesure que l'horizon augmente, le nombre d'observations diminue, ce qui réduit la précision statistique. Pour calculer les espérances, variances, et covariances nécessaires pour l'allocation actif, nous allons donc recourir à un modèle. Ce modèle nous permet, à partir des espérances, variances, et covariances observées à fréquences élevées, de calculer leurs équivalents à fréquence basse. Pour ce faire, et suivant les travaux de Campbell and Viceira (2002), nous nous appuyons sur le modèle Vector Autoregression — VAR(1) — qui permet de capturer la prédictibilité en considérant l'interaction entre les rendements futurs et les rendements et autre prédicteurs passés. Celui-ci est spécifié par

$$X_t - \bar{X} = \Phi(X_{t-1} - \bar{X}) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad (2)$$

où  $(X_t)$  est le vecteur des rendements et autres prédicteurs de taille  $N$ , et  $(\epsilon_t)$  est le terme des erreurs, dont la loi est supposée être gaussienne, centrée et de variance covariance  $\Sigma$ . Ainsi, les rendements en  $t$  sont prédis par une relation linéaire des rendements et autres prédicteurs passés. Le vecteur  $\bar{X}$  et la matrices  $\Phi$  sont les paramètres clés de ce modèle et sont traditionnellement estimés.

Afin d'illustrer comment des relations de court terme nous permettent de calculer des relations de long terme, on se propose d'étudier un cas particulier, plus simple, de notre modèle VAR :

$$r_{t+1} = \alpha + \beta z_t + u_{t+1} \quad (3)$$

$$z_{t+1} = \phi z_t + v_t \quad (4)$$

Avec  $r$  le rendement d'un actif, par exemple un indice correspondant à un investissement en actions,  $\rho$  est le coefficient d'autocorrélation,  $\beta$  le coefficient prédictif associé au prédicteur  $z$ . Ce dernier suit un processus AR(1) non explosif, i.e.  $0 < \phi < 1$ . On suppose que les erreurs  $u$  et  $v$  sont corrélées, avec en général une corrélation négative,  $\sigma_{r,z} < 0$ . La variance pour deux périodes s'écrit :

$$\frac{1}{2} \text{Var}_t(r_{t+1} + r_{t+2}) = \frac{1}{2} \text{Var}_t(r_{t+1}) + \frac{1}{2} \text{Var}_t(r_{t+2}) + \text{Cov}_t(r_{t+1}, r_{t+2}) \quad (5)$$

$$= \underbrace{\sigma_r}_{\text{Variance 1 période}} + \overbrace{\frac{1}{2} \beta^2 \sigma_z^2}^{>0} + \underbrace{\beta \sigma_{r,z}}_{\text{Retour à la moyenne?}} \quad (6)$$

Elle se compose de trois termes. Le premier est la volatilité associée à une seule période  $\sigma_r$ . En

l'absence de prédictibilité,  $\beta = 0$  et la volatilité est égale à  $\sigma_r$  quel que soit l'horizon d'investissement. Le second terme correspond à l'impact de la volatilité des prédicteurs sur celle de l'actif. Son impact est toujours positif, mais a tendance à diminuer rapidement avec l'horizon (les coefficients  $\rho$  et  $\beta$  étant nettement inférieurs à 1). Enfin, le dernier terme dépend de la corrélation entre les innovations  $u$  et  $v$  et est fortement négatif : c'est l'effet retour à la moyenne.

## 2.2 Limites d'une analyse de long terme

Deux grandes critiques de la prédictibilité des rendements se sont dégagées dans la recherche académique depuis les années 2000. La première est celle de la (relative) absence de prédictibilité hors-échantillon. Les relations de prédictibilité sont généralement instables et n'auraient que rarement permis à un investisseur de battre le marché en temps réel. Il n'est donc pas exclu que certains des prédicteurs identifiés par la littérature aient été le produit d'un biais de publication. Les études à vocation exhaustives, telles que Goyal and Welch (2008) ont des conclusions au mieux modérées quant à la prédictibilité.

Une autre critique qui peut s'appliquer à notre approche est qu'elle ne tient pas compte de l'incertitude qui entoure les estimations sur des données de long terme. En effet, les marges d'erreur entourant les estimations des coefficients prédictifs, ainsi que des rendements de long terme, sont conséquentes. Compte tenu des données de long terme par définition limitées, la complexité du modèle VAR (d'ordre  $O(N^2)$ ) rend les estimations particulièrement instables. Plusieurs études ont ainsi montré, par exemple, qu'ignorer le risque d'estimation pouvait conduire à sous-estimer les risques à long terme (Barberis, 2000; Pastor and Stambaugh, 2012). Ces études utilisent une méthodologie dite bayésienne qui présente l'avantage d'introduire les croyances des investisseurs dans le choix d'investissement. Penasse (2015) étudie un système de croyance particulier dans lequel un investisseur d'un pays donné est susceptible d'améliorer la précision de ses estimations en observant les données d'autres pays. L'étude conclue que les conclusions de Barberis (2000) et Pastor and Stambaugh (2012) (notamment) sont trop pessimistes. En effet, la possibilité d'apprentissage en coupe limite sensiblement le risque d'estimation et augmente la précision des rendements de long terme et des coefficients prédictifs.

## 2.3 Estimation et calibration

Le modèle VAR tel que donné par l'équation (2) peut être estimé très simplement par la méthode des moindres carrés, une fois défini l'ensemble des variables prédictives. Contenu des deux critiques énoncées ci-dessus, nous adoptons cependant une approche hybride. D'abord, pour obtenir un modèle parcimonieux, nous opérons une sélection a priori des variables prédictives, choix orienté par la littérature. Pour limiter le nombre de paramètres à estimer, nous supposons que la matrice

$\Phi$  est creuse. Les actions ( $r_{e,t}$ ) sont ainsi prédites uniquement par le log du ratio dividende/prix ( $ldp_t$ ); l'immobilier ( $r_{i,t}$ ) par le log du ratio loyer/prix ( $rp_t$ ); le rendement du portefeuille obligataire ( $r_{b,t}$ ) par son passé seulement; les autres variables du VAR, id-est ( $r_{f,t}$ ) le taux monétaire, ( $ldp_t$ ) et ( $rp_t$ ) sont modélisées par des AR(1). Cette approche tient donc on compte du risque de biais de publication, puisque les variables prédictives que nous retenons sont motivées par la théorie.

Nous approchons le risque d'estimation de façon pragmatique en adoptant une matrice  $\Phi$  creuse et en calibrant une partie des rendements de long terme. Cette procédure réduit le nombre de paramètres à estimer et permet de calibrer des anticipations de moyenne de long terme.<sup>3</sup>

Cette modélisation parcimonieuse, bien que reposant sur une sélection a priori des prédicteurs, permet d'une part d'obtenir des estimations plus précises et réduire le risque dû à la faible taille de l'échantillon. D'autre part, elle fournit des interactions relativement directes entre le rendement futur et le prédicteur passé et permet donc des interprétations intuitives.

Nous présentons sur le tableau 3 les rendements moyens, volatilités, et ratios de Sharpe pour chacun des éléments de notre VAR; nous présentons aussi les résultats de notre calibration. Cette calibration, décidée avec nos partenaires de la CDC et de la CNP, suppose un taux d'inflation faible et par conséquent un taux monétaire plus faible que sur la période disponible. Le taux long est aussi ajusté en conséquence. Enfin, les rendements moyens sur les actions et l'immobilier sont ajustés pour offrir un ratio de Sharpe égal à 0.15 pour les deux classes d'actifs. Cette calibration se veut prudente, notamment s'agissant des rendements immobiliers. Les rendements immobiliers de long terme sont en effet encore assez mal documentés. Une étude récente affirme que ces rendements sont très attractifs (Jorda et al., 2017), mais le caractère réaliste de ces estimations fait débat. Les rendements de long terme sont notamment très sensibles au taux de dépréciation et à la zone géographique retenus. Notons aussi qu'il s'agit de rendements pour un investissement en immobilier résidentiel, qui n'est pas nécessairement investissable. Enfin, un autre problème est que les indices immobiliers ont tendance à être trop "lisses" (par exemple, cf. Brounen and Eichholtz 2003).<sup>4</sup>

---

3. Une approche alternative que nous avons aussi considérée consiste à spécifier des croyances a priori sans négliger les données (Barberis, 2000). Penasse (2015) étudie le cas dans lequel ces croyances sont elles-mêmes basées sur les données d'autres pays.

4. En particulier, elles sont trop persistantes, leurs autocorrélations surestiment la réalité. Cette surestimation de la persistance conduit également à sous-estimer la volatilité. Plutôt que de corriger la persistance de notre série immobilière, nous préférons ajuster sa tendance de long terme.

TABLE 3 – Statistiques descriptives échantillon et calibration

Actif	Données			Calibration		
	Moy.	Volat.	Sharpe	Moy.	Volat.	Sharpe
$r_{f,t}$	6.1	2.0	-	2.7	1.9	-
$r_{e,t}$	10.0	22.5	0.17	6	22.5	0.15
$r_{i,t}$	8.4	3.4	0.68	3.2	3.4	0.15
$r_{b,t}$	8.2	6.7	0.31	3.1	6.7	0.06
$\exp(lp_d_t)$	3.7	1.6	-	-	-	-
$\exp(lr_p_t)$	2.7	0.6	-	-	-	-

## 2.4 Cyclicité et structure par terme du risque

Avant de présenter nos résultats d'allocation d'actifs, nous illustrons dans le graphique 7 la capacité du modèle VAR à reproduire le niveau et la cyclicité de risque des différentes classes d'actif. Nous présentons dans l'Annexe B les résultats de l'estimation du modèle VAR. Le graphique 7 est construit de façon similaire que le graphique 2, mais cette fois sur la base de données simulée à partir de notre VAR France. Le modèle reproduit bien le niveau de risque et la cyclicité des rendements actions et obligations. L'immobilier apparaît plus risqué en moyenne, ce qui reflète notre calibration. En revanche, le risque immobilier apparaît croissant avec l'horizon d'investissement. La raison, comme on va le voir, est que dans nos données les prix immobiliers ne sont pas caractérisés par un retour à la moyenne.

Le graphique 8 présente la structure par terme de la volatilité pour nos quatre classes d'actifs. On retrouve, en ligne avec le graphique 4, la décroissance de la volatilité action avec l'horizon. Pour un horizon de 1 trimestre la volatilité annualisée est de 22.5% (cf. Tableau 3), tandis que pour un horizon de 20 ans elle approche 15%. Toutes les autres classes d'actifs voient au contraire leur volatilité augmenter avec l'horizon. C'est notamment le cas de l'immobilier, dont la volatilité approche les 10% à 20 ans. Les instruments monétaires sont eux aussi très risqués lorsque l'horizon s'accroît.

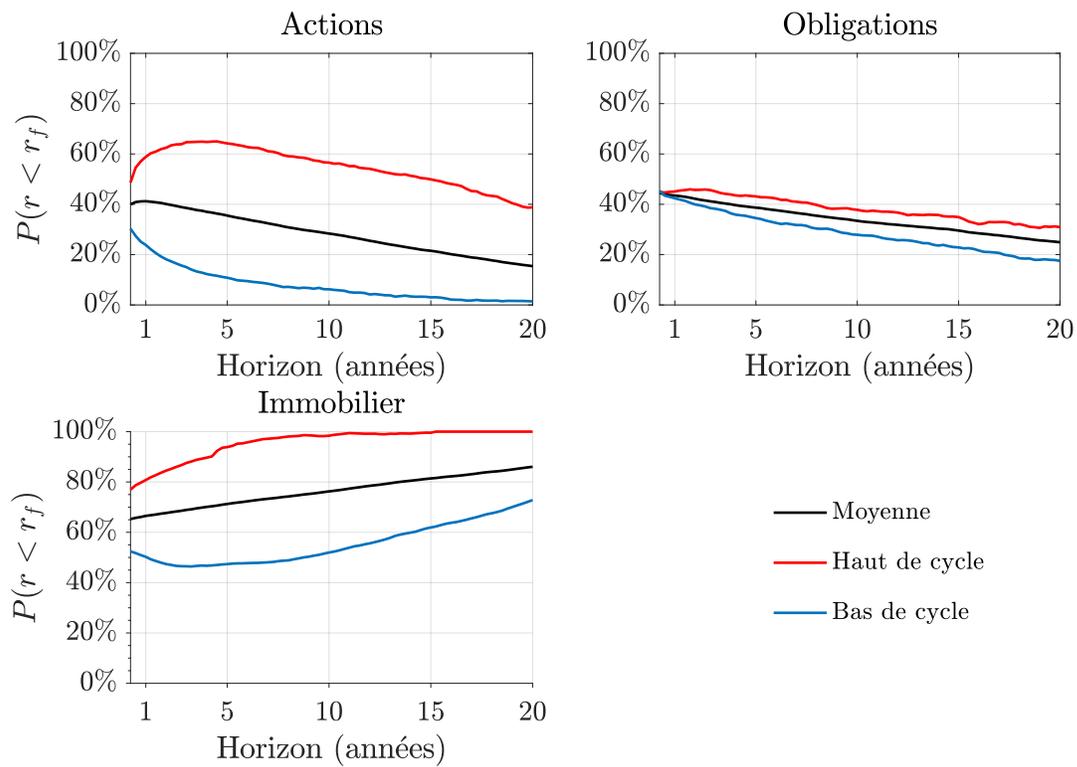


FIGURE 7 – Probabilité de sous-performer un instrument monétaire en fonction du cycle à partir de données simulées. **Cyclicité du risque décrite par le modèle VAR.**

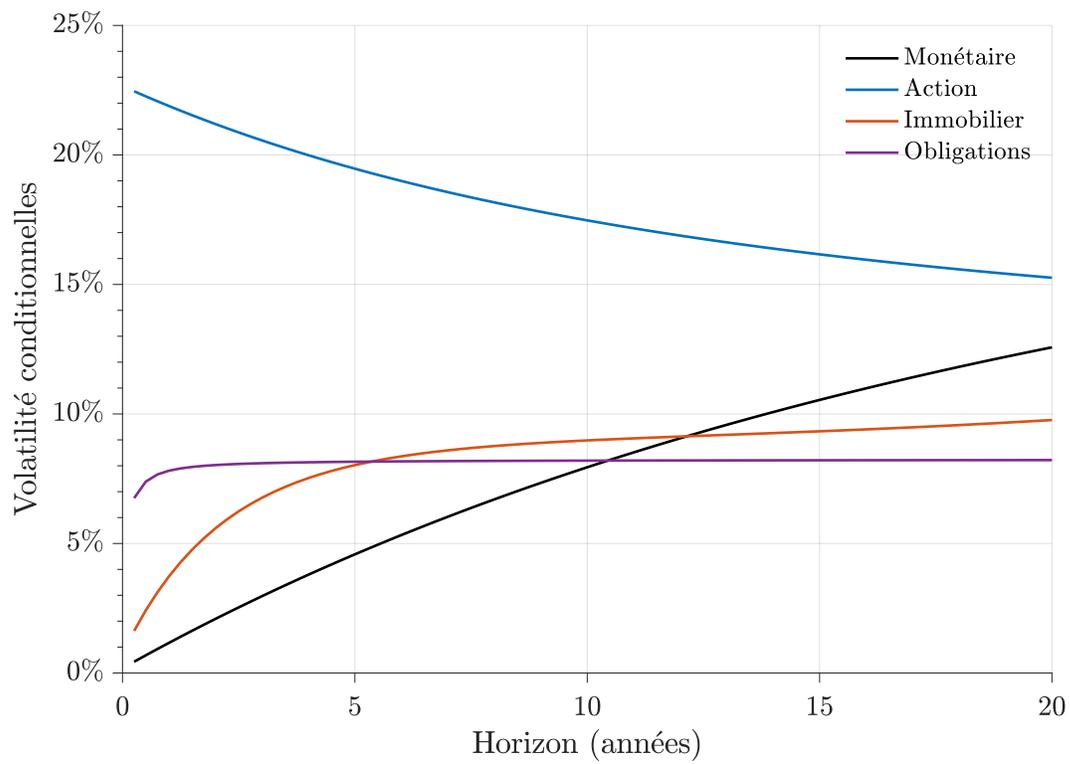


FIGURE 8 – Variabilité multi-période des rendements donnée par le modèle VAR.

### 3 Allocation d'actif et passif

Nous présentons à présent notre modèle d'allocation d'actif. Nous prenons le point de vue d'un investisseur cherchant à maximiser sa richesse à long terme. Cette richesse, que nous notons  $S_t$ , pour surplus, se compose d'un actif  $A_t$  et d'un passif  $L_t$ , avec :

$$S_t = A_t - L_t, \quad (7)$$

On retrouve le cadre de choix de portefeuille classique lorsque  $L_t = 0$ .

#### 3.1 Introduction

Pour fixer les idées, supposons que l'investisseur alloue sa richesse entre un actif risqué et un actif sans risque selon des préférences moyenne-variance. Le rendement de l'actif évolue selon l'équation suivante :

$$r_{t,A} = \alpha_t r_{e,t} + (1 - \alpha_t) r_{f,t}, \quad (8)$$

avec  $(\alpha_t)$  les poids du portefeuille d'actifs dont les (log-)rendements risqués correspondent aux composantes de  $(r_{e,t})$ , et  $(r_{f,t})$  est le taux sans risque.

Les préférences notre investisseur peuvent être représentées par la fonction d'utilité

$$U_t = \mathbb{E}[r_{t,p}] - \gamma V(r_{t,p}),$$

où  $(r_{t,p})$  est le log-rendement du portefeuille et  $\gamma > 0$  l'aversion au risque. L'investisseur doit payer un coupon  $r_{t,L}$  sur le passif et choisir la part  $\alpha_t$  qu'il veut investir dans l'actif risqué. En supposant qu'il s'agisse d'un problème une période qui peut être considéré comme une décision de type "buy and hold", nous avons  $r_{t,p} = Ar_{t,A} - Lr_{t,L}$ , avec  $r_{t,A} = \log(A_t/A_{t-1})$ . Sans perte de généralité, en prenant  $A = 1$ , le rendement du portefeuille devient

$$r_{t,p} = \alpha_t r_{e,t} + (1 - \alpha_t) r_{f,t} - Lr_{t,L},$$

dont l'espérance et la variance sont donnés respectivement par

$$\mathbb{E}[r_{t,p}] = \alpha_t \mu_e + (1 - \alpha_t) r_{f,t} - L\mu_L, \quad V(r_{t,p}) = \alpha_t^2 \sigma_e^2 + L^2 \sigma_L^2 - 2\alpha_t L \rho_{e,L},$$

avec  $\mathbb{E}[r_{j,t}] = \mu_j$ ,  $V(r_{j,t}) = \sigma_j^2$ , avec  $j = e, L$ , et  $\rho_{e,L}$  correspond à la corrélation entre le passif et

les actifs. Ainsi, les conditions du premier ordre impliquent que la solution optimale  $\alpha_t^*$  soit

$$\alpha_t^* = \frac{\mu_e - r_{f,t} + 2\gamma L\rho_{e,L}}{2\gamma\sigma_e^2}.$$

Si  $L = 0$ ,  $\alpha_t^*$  est la solution classique du problème de moyenne-variance. En revanche, lorsque  $L \neq 0$ , apparaît la quantité  $2\gamma L\rho_{e,L}$ , dite *demande de couverture*. La conséquence est que si les actifs co-varient positivement avec le coupon du passif, alors le poids d'allocation pour cet actif sera plus important. Ainsi, si  $(r_{t,L})$  est proportionnel au taux d'inflation, alors les actifs covariant positivement avec l'inflation seront plus attractifs.

### 3.2 Cadre général

L'impact du passif dans l'allocation a précédemment été mis en évidence pour un investisseur dont les préférences sont de type moyenne-variance. Nous présentons à présent le cas plus général, dans lequel l'investisseur a accès aux actifs que nous avons défini précédemment et maximise à l'instant  $T$  son espérance d'utilité à un horizon  $T + k$ . Nous supposons à présent des préférences qui sont plus courantes dans la littérature, à savoir une fonction CRRA (constant relative risk aversion).

On va d'abord continuer à étudier le cas d'un seul actif  $(r_{e,t})$  et une allocation entre  $T$  et  $T + 1$ . En supposant le coefficient d'aversion au risque  $\gamma > 1$ , ce problème s'écrit

$$\begin{cases} \arg \max_{\alpha_T} \mathbb{E}_T [U(S_{T+1})] = \arg \max_{\alpha_T} \mathbb{E}_T \left[ \frac{S_{T+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right], \\ \text{s.c. } S_T = \frac{W_T}{L_T}, \quad W_{T+1} = R_{p,T+1}W_T. \end{cases}$$

En utilisant la log-normalité des rendements et l'approximation log-rendement, nous obtenons l'allocation buy-and-hold optimale avec passif

$$\alpha_T^* = \frac{\mathbb{E}_T [r_{e,T+1} - r_{f,T+1}] + \sigma_e^2/2 + (\gamma - 1)\sigma_{e,L}}{\gamma\sigma_e^2},$$

avec  $\sigma_{e,l}$  la covariance entre l'actif et le passif. Si l'investisseur maximise uniquement par rapport à sa richesse, la solution optimale est donnée par

$$\tilde{\alpha}_T^* = \frac{\mathbb{E}_T [r_{e,T+1} - r_{f,T+1}] + \sigma_e^2/2}{\gamma\sigma_e^2}.$$

Ce problème d'allocation avec passif s'étend aisément à plusieurs actifs de rendements  $r_t$  constituant

le portefeuille et pour tout horizon  $T + k$ . Dans ce cas,  $\alpha_{T+k-1}^*$  est le vecteur des allocations pour une allocation buy-and-hold d'horizon  $k$  réalisée en  $T$ , et est donné par

$$\alpha_{T+k-1}^* = \left( \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \Sigma_r^{(T+k)} + \frac{1}{\gamma} \Sigma_r \right)^{-1} \left( \mathbb{E}_T [r_{T+k} - r_{f,T+k}^\iota] + \frac{1}{2} \Sigma_r + (\gamma - 1) \Sigma_{r,L}^{(T+k)} \right),$$

avec  $\iota$  le vecteur de 1 de même taille que  $r_t$  permettant d'obtenir les rendements excédentaires,  $\Sigma_r$  la matrice de variance-covariance des actifs en  $T$ ,  $\Sigma_r^{(T+k)}$  la matrice de variance-covariance des rendements des actifs cumulés prédite en  $T + k$  à partir de l'information en  $T$ .

Les quantités  $\Sigma^{(T+k)}$  et  $\mathbb{E}_T [r_{T+k}]$  sont obtenues grâce au modèle VAR fournissant les espérances et variances prédites conditionnellement à l'information disponible en  $T$  par les formules

$$\begin{cases} \mathbb{E}_T \left[ \sum_{i=1}^K X_{T+i} \right] &= \left( \sum_{l=0}^{K-1} (K-l) \Phi^l \right) (\bar{X} - \Phi \bar{X}) + \left( \sum_{l=1}^K \Phi^l \right) X_T, \\ V_T \left( \sum_{i=1}^K X_{T+i} \right) &= \Sigma + (I + \Phi) \Sigma (I + \Phi)' + (I + \Phi + \Phi \Phi) \Sigma (I + \Phi + \Phi \Phi)' + \dots \\ &+ (I + \Phi + \Phi \Phi + \dots + \Phi^{k-1}) \Sigma (I + \Phi + \Phi \Phi \dots + \Phi_1^{k-1}). \end{cases}$$

### 3.3 Contraintes réglementaires

Notre cadre économétrique peut être étendu pour produire des allocations tenant compte de contraintes réglementaires. Nous nous sommes intéressés au cas d'un assureur, sujet à un cas simplifié des règles de Solvabilité II. Les règles de Solvabilité II allouent un poids en capital qui dépend de la classe d'actif considérée ; le régulateur fournit également une matrice de corrélation entre les classes actifs (cf. Annexe C). L'approche que nous avons retenue pour calculer l'allocation actif sous contrainte de solvabilité a consisté à calculer le rendement du portefeuille net de sa charge réglementaire.

Pour calculer la charge en capital du portefeuille  $SCR_{port}$  à un horizon donné, nous calculons les charges en capital par actif. Notons  $SCR_i$  (pour *Solvency Capital Requirement*) le poids en capital par classe d'actif  $i$ . Chaque charge dépend du poids de l'allocation dans le portefeuille. Par exemple, sachant que les actions sont pondérées au taux de 40%, le SCR action sera égal à  $20\% \times 40\%$  si le poids de la classe action est de 20%. La charge en capital du portefeuille est alors égale à

$$SCR_{port} = \sqrt{\sum_{(i,j)} \rho_{i,j}^{reg} \times SCR_i \times SCR_j}, \quad (9)$$

où  $\rho_{i,j}^{reg}$  est la corrélation "réglementaire" entre les classes actifs  $i$  et  $j$ . Une fois la charge en capital calculée, on peut facilement obtenir le rendement net du portefeuille, ce qui permet de maximiser la fonction d'utilité de l'investisseur, sur la base de ce rendement net.

### 3.4 Spécification économétrique

La prise en compte du passif nécessite d'amender notre modèle VAR pour y inclure la variable de passif retenue. Notons cette variable par  $(r_{L,t})$ , modélisée par un AR(1). La définition du taux  $(r_{L,t})$  clotûre la spécification du modèle VAR avec passif. Notre étude a retenu pour celui-ci : le taux monétaire réel  $r_{f,t}^e$  ; le taux monétaire nominal  $r_{f,t}$  ; enfin, le rendement du portefeuille obligataire  $r_{b,t}$ .

### 3.5 Résultats

Nous présentons les résultats de l'allocation d'actifs avec et sans contrainte Solvabilité II sur les graphiques 9 et 10. Sur chaque graphique, nous présentons les allocations en l'absence de contraintes de passif, ainsi que pour les trois forme de passif considérées. Pour construire ces allocations, par simplicité, nous initions les variables prédictives notre modèle VAR à leurs valeurs de long terme et retenons un coefficient d'aversion au risque  $\gamma = 5$ .

Les allocations reflètent la structure par terme du risque (Graphique 8) et, le cas échéant, le besoin de couverture du passif. Ces allocations privilégient une allocation en immobilier pour des horizons relativement court. Peut-être paradoxalement, l'allocation en immobilier décroît sensiblement lorsque l'horizon augmente. Inversement, le poids en actions augmente avec l'horizon d'investissement. Ces arbitrages entre ces deux classes d'actifs avec les ratios de Sharpe les plus élevés (par hypothèse, cf. Tableau 3) reflète leurs structures par terme du risque inversées. On notera aussi l'absence d'investissement en immobilier lorsque le passif correspond au portefeuille obligataire, ce qui reflète la mauvaise couverture qu'offre immobilier face aux taux longs. Enfin, l'effet distortif de la contrainte solvency apparait relativement faible, pénalisant légèrement les actifs risqués (Graphique 10).

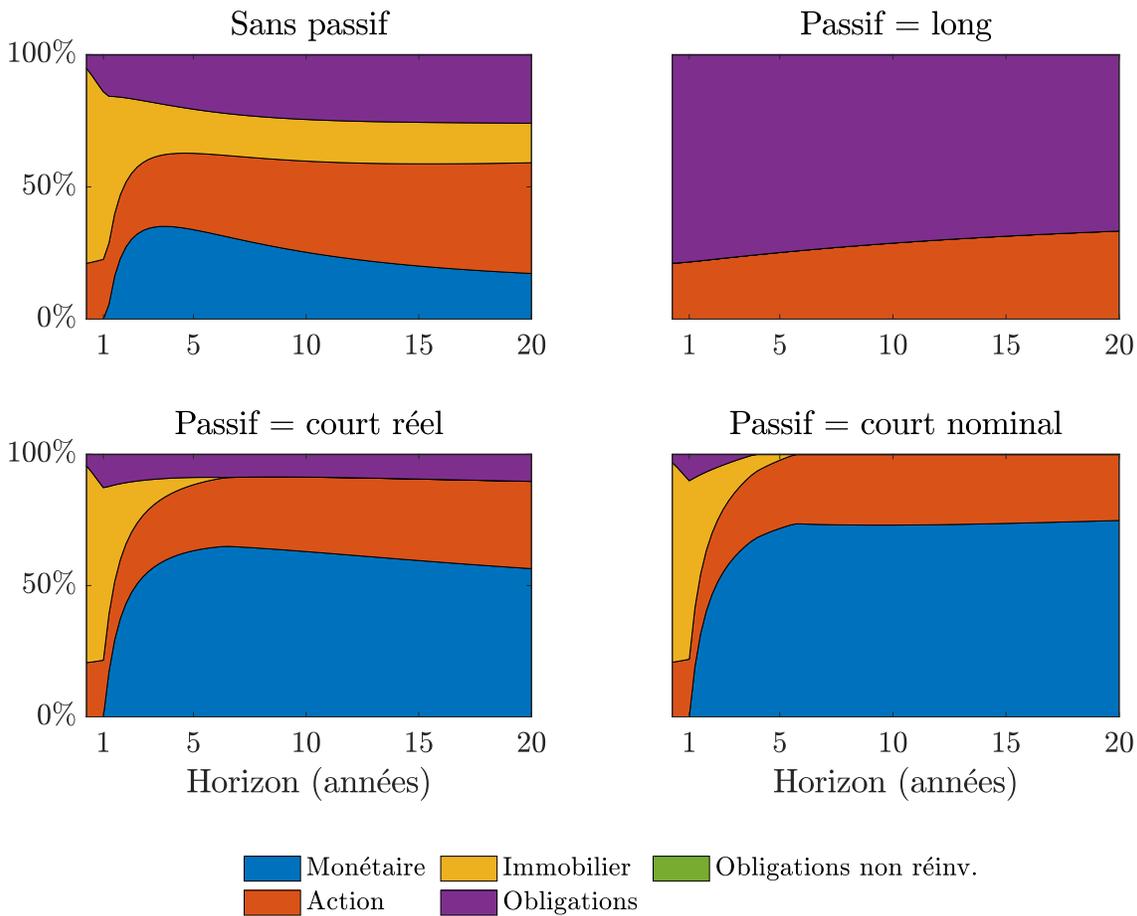


FIGURE 9 – Allocation d'actif (sans contrainte Solvabilité II)

## 4 Conclusion et perspectives

Lorsque les rendements des actifs ne sont pas prévisibles, l'horizon d'investissement n'a pas d'impact sur l'allocation d'actif. Au contraire, si les rendements sont prévisibles, l'investisseur de long terme va ajuster son allocation en fonction des conditions de marché. Plus précisément, son allocation dépend de la structure par terme du risque — espérances, volatilités et corrélations conditionnelles —, structure estimée par le biais d'un modèle économétrique.

Pour modéliser la variation des rendements, nous avons retenu un modèle VAR que nous avons voulu "creux" afin de conserver une approche parcimonieuse. Un nombre relativement restreint de variables prédictives capture ainsi la variation des rendements espérés. Ce modèle fournit des relations linéaires entre des variables prédictives et les rendements — corrélations instantanées par exemple — et permet de calculer les moments conditionnels des rendements cumulés sur le long

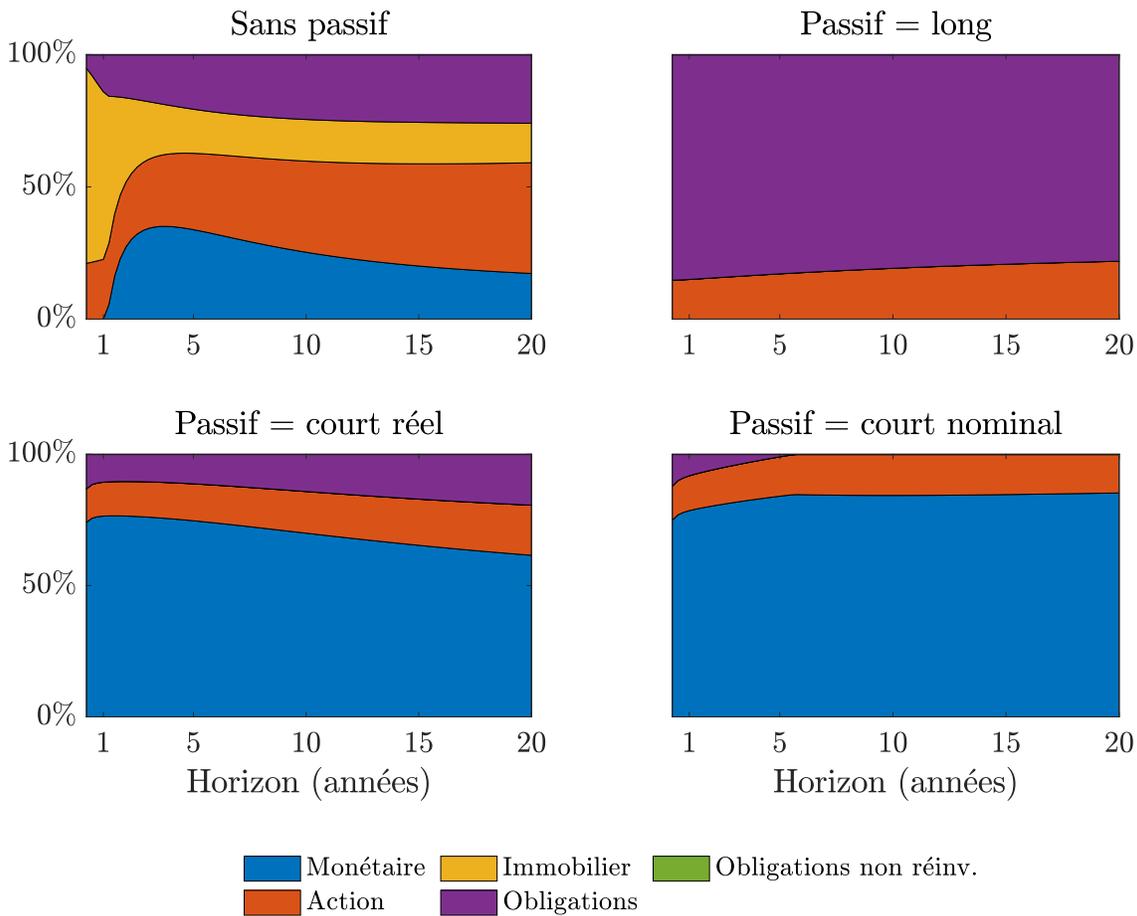


FIGURE 10 – Allocation d’actif (avec contrainte Solvabilité II)

terme.

Le modèle initialement proposé par Campbell and Viceira (2002) étudie un choix de portefeuille en l’absence de passif. Une part considérable de nos travaux a consisté à étendre ce modèle à différentes formes de passif, en s’inspirant notamment de Hovenaars et al. (2008). Cette approche permet de tenir compte du besoin de couverture du passif. Ainsi, dans la mesure où il offre une possibilité de couverture, un actif aura un poids d’allocation plus significatif s’il covarie positivement avec le passif. Notre approche permet de tenir compte de cet effet en fonction de l’horizon d’investissement. Notre modèle estime les différentes corrélations à long terme entre les actifs et le passif, ce qui permet de construire des profils d’allocation à long terme. Par surcroit, nous avons également intégré, de façon stylisée, des contraintes réglementaires de type Solvabilité II dans l’allocation d’actif.

Enfin, notons que notre approche est particulièrement flexible, ce qui permet d’étendre la taille

des portefeuilles et de mener des modélisations plus fines de la structure par terme du risque, en particulier des corrélations dynamiques (par exemple des changements de régimes), tout en conservant un nombre raisonnable de paramètres à estimer. En outre, cette approche offre la possibilité d'intégrer des a priori sur les trajectoires de long terme des rendements, par exemple sur les espérances conditionnelles des rendements cumulés (Penasse, 2015).

Pour conclure, notons néanmoins les limites de notre approche. Un angle mort, partagée par l'ensemble de la littérature, est que le modèle VAR suppose une vitesse constante de retour à la moyenne. Cela suppose, par exemple, que la relation entre dividendes et prix est stable dans le temps, si bien que le ratio dividende/prix revient toujours, et à la même vitesse, à une unique valeur de long terme. Cette hypothèse est pratique mais problématique. On connaît l'adage, dû à Keynes, "les marchés peuvent rester irrationnels plus longtemps que vous pouvez rester solvable." Dit autrement, les rendements attendus peuvent rester faibles plus longtemps que prédit par notre modèle VAR. Empiriquement, une variable peut simplement voir sa moyenne changer dans le temps. On observe ce type de dynamique très nettement pour les prix immobiliers français par exemple, dont les prix (par rapport aux loyers) sont devenus durablement élevés autour des années 2000 (Graphique 11). Cette dynamique n'est pas étrangère à la dynamique analogue des taux longs sur les cinquante dernières années.

On notera que ces changements de long terme peuvent caractériser non seulement les rendements, mais aussi la volatilité et les corrélations. Se pose alors la question l'allocation d'actif lorsque ces changements sont pris en compte : par exemple un régime dans lequel les taux sont élevés versus un régime de taux faibles. La problématique consisterait à identifier les variations de court terme (mois, trimestres) des variations sur le long terme (plusieurs années, décennies). Pour ce faire, une première méthode vise à spécifier des modèles à changement de régimes de type chaîne de Markov cachées sur la moyenne de long terme et/ou la matrice des corrélations. Une autre approche consiste à filtrer les variations courtes des variations longues. Nous serions ainsi en mesure de séparer la composante prédictible de long terme des changements contingents liés à des chocs n'introduisant pas de changements structurels.

L'équilibre entre un modèle suffisamment riche et parcimonieux en termes de paramètres est une autre problématique à prendre en compte, notamment si la taille des portefeuilles est significative. En effet, notre modélisation économétrique doit être flexible pour capturer la composante prédictible, l'inconvénient étant le sur-apprentissage statistique réduisant sensiblement la capacité du modèle à correctement prédire. Ainsi, la parcimonie est une propriété importante, car elle vise à répondre au sur-apprentissage en conservant les variables prédictives pertinentes et ainsi obtenir des gains d'interprétation. Par exemple, les méthodes dites "creuses" permettent de sélectionner automatiquement ces variables tout en estimant les paramètres.

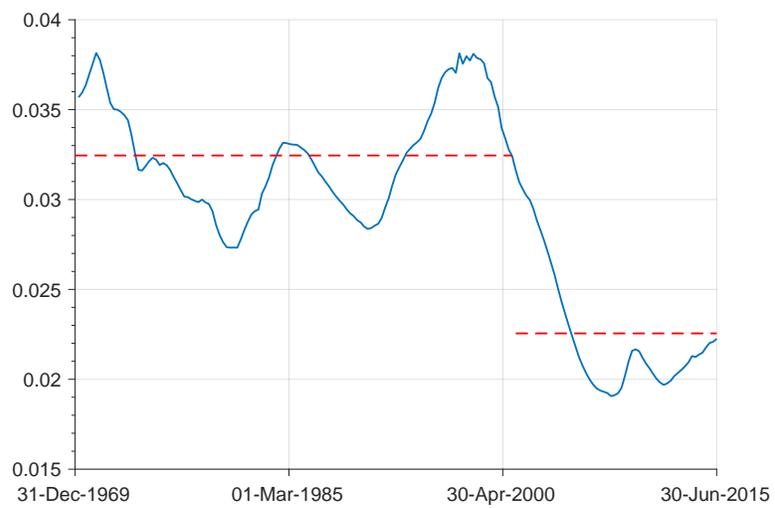


FIGURE 11 – Ratios loyer/prix France : existence d'un nouveau régime ?

## A Description des données

La plupart de nos données sont fournies par la base de données GFD et sont disponibles depuis 1960 à 2015. Les données immobilières sont obtenues auprès de l'OCDE et sont disponibles de 1970 à 2015. Toutes ces données sont en fréquence trimestrielle.

Notre portefeuille obligataire est construit sur la base d'une obligation 10Y conservée jusqu'à maturité. Les coupons annuels sont réinvestis dans une obligation du même type. Ce portefeuille est revalorisé trimestriellement : on obtient une série trimestrielle de rendements obligataires buy & hold. Les rendements obligataires sont eux-mêmes calculés sur la base des taux long, en utilisant une duration 10 ans approximée.

Nous disposons de deux séries immobilières brutes : les prix historiques (nominaux) et indice de ratio loyer/prix. Pour obtenir une approximation des rendements immobiliers avec réinvestissement des loyers, on retient le taux de rendements bruts de 2.99% fournis par le site [globalpropertyguide.com](http://globalpropertyguide.com) au premier trimestre de 2012. On suppose des charges égales au tiers du loyer brut pour obtenir une approximation des rendements nets. On obtient ainsi un prédicteur (supposé) du marché immobilier (le ratio loyer/prix) et une série de rendements excédentaires immobiliers.

Pour construire le Graphique 1, nous utilisons les données immobilière construites par Jorda et al. (2017). Contrairement aux données OCDE, ces données ne sont disponibles qu'en fréquence annuelle et n'incluent pas le ratio loyer/prix. Pour transformer les prix en rendements approximatifs, nous supposons une rentabilité nette identique à celle que nous observons pour la période 1970-2015.

Pour construire le Tableau 2, nous utilisons les rendements investment grade US fournis par Asvanunt and Richardson (2017), ainsi que les taux Aaa/Baa de maturité supérieurs à 20 ans fournis par Moody's. Nos données de changes sont basées sur les taux spots et forwards et obtenus via Datastream (Barclays Bank International et Reuters).

## B Résultats d'estimation du VAR

TABLE B.I – Estimations VAR France - Échantillon trimestriel

	$r_{c,t+1}^{nom}$	$r_{e,t+1}$	$r_{i,t+1}$	$r_{b,t+1}$	$ldp_{t+1}$	$lrp_{t+1}$
$r_{c,t}^{nom}$	<b>0.98</b> (68.1)	-	-	-	-	
$r_{e,t}$	-	-	-	-	-	
$r_{i,t}$	-	-	<b>0.86</b> (23.3)	-	-	
$r_{b,t}$	-	-	-	<b>0.18</b> (3.9)	-	
$ldp_t$	-	0.02 (1.5)	-	-	<b>0.97</b> (69.9)	-
$lrp_t$	-	-	<b>0.01</b> (2.8)	-	-	<b>0.99</b> (190.7)
$R^2$	0.95	0.01	0.77	0.03	0.94	0.99

TABLE B.II – Estimations VAR des volatilités (annualisées) et corrélations

	$r_{c,t}^{nom}$	$r_{e,t}$	$r_{i,t}$	$r_{b,t}$	$ldp_t$	$lrp_t$
$r_{c,t}^{nom}$	<b>0.4</b>	-21.0	10.1	-41.2	18.4	-19.8
$r_{e,t}$	-21.0	<b>22.5</b>	5.1	10.4	-90.3	4.3
$r_{i,t}$	10.1	5.1	<b>1.6</b>	-12.1	-7.8	-48.3
$r_{b,t}$	-41.2	10.4	-12.1	<b>6.7</b>	-13.6	23.4
$ldp_t$	18.4	-90.3	-7.8	-13.6	<b>24.0</b>	-7.1
$lrp_t$	-19.8	4.3	-48.3	23.4	-7.1	<b>2.9</b>

## C Poids et corrélations pour l'allocation SCR

Les SCR que nous avons retenu sont :

- 40% pour les actions ;
- 25% pour l'immobilier ;
- 7.2% pour les obligations (en supposant une duration de 8 et un choc de 90 bps pour une obligation AAA) ; 0% pour le monétaire.

Les corrélations réglementaires sont données par la matrice C.III.

TABLE C.III – Corrélations réglementaires Solvency II

	Taux	Action	Immobilier	Obligataire
Taux	1	0.5	0.5	0.5
Action	0.5	1	0.75	0.75
Immobilier	0.5	0.75	1	0.5
Obligataire	0.5	0.75	0.5	1

## Références

- Asvanunt, Attakrit, and Scott Richardson, 2017, The Credit Risk Premium, *Journal of Fixed Income* 26, 7–26.
- Barberis, Nicholas, 2000, Investing for the long run when returns are predictable, *Journal of Finance* 55, 225–264.
- Binsbergen, Jules Van, and Michael Brandt, 2012, Optimal Asset Allocation in Asset Liability Management .
- Brounen, Dirk, and Piet M.a Eichholtz, 2003, Property, Common Stock, and Property Shares, *The Journal of Portfolio Management* 29, 129–137.
- Campbell, John Y., and Luis M. Viceira, 2002, *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, Oxford, UK).
- Case, Karl E., and Robert J. Shiller, 1987, Prices of single-family homes since 1970 : New indexes for four cities, *New England Economic Review* 45–56.
- Dahlquist, Magnus, and Julien Penasse, 2017, The Missing Risk premium In Exchange Rates, Technical report, Working paper University of Luxembourg.
- Fama, Eugene F., 1984, Forward and spot exchange rates, *Journal of Monetary Economics* 14, 319–338.
- Fama, Eugene F., 1986, Term premiums and default premiums in money markets, *Journal of Financial Economics* 17, 175–196.
- Fama, Eugene F., and Robert R. Bliss, 1987, The information in long-maturity forward rates, *The American Economic Review* 77, 680–692.
- Fama, Eugene F., and Kenneth R. French, 1988a, Dividend yields and expected stock returns, *Journal of Financial Economics* 22, 3–25.
- Fama, Eugene F., and Kenneth R. French, 1988b, Permanent and temporary components of stock prices, *Journal of Political Economy* 96, 246–273.
- Goyal, Amit, and Ivo Welch, 2008, A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction, *Review of Financial Studies* 21, 1455–1508.

- Hoevenaars, Roy P.M.M., Roderick D.J. Molenaar, Peter C. Schotman, and Tom B.M. Steenkamp, 2008, Strategic asset allocation with liabilities : Beyond stocks and bonds, *Journal of Economic Dynamics and Control* 32, 2939–2970.
- Jorda, Oscar, Katharina Knoll, Dmitry Kuvshinov, Moritz Schularick, and Alan M. Taylor, 2017, The Rate of Return on Everything, 1870-2015, Technical report, Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Paper Series 01-123.
- Marfè, R, and J Penasse, 2017, The time-varying risk of macroeconomic disasters, Technical report, Working paper University of Luxembourg.
- Merton, Robert C., 1980, On estimating the expected return on the market : An exploratory investigation, *Journal of Financial Economics* 8, 323–361.
- Pastor, Lubos, and Robert F. Stambaugh, 2012, Are Stocks Really Less Volatile in the Long Run ?, *Journal of Finance* 67, 431–478.
- Penasse, Julien, 2015, Return Predictability : Learning from the Cross-Section.
- Poterba, JM, and LH Summers, 1988, Mean reversion in stock prices : Evidence and Implications, *Journal of Financial Economics* 22, 27–59.